4.2.26 Další soustavy dvou rovnic

Předpoklady: 040225

Př. 1: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{aligned} x+y+xy&=7 \\ x+2y&=7 \end{aligned}$.

První rovnice obsahuje součin xy $\Rightarrow$ nemůžeme použít ani sčítací ani srovnávací metodu (v obou případech bychom se nedokázali zbavit jedné z neznámých).
Z druhé rovnice vyjádříme x a dosadíme ho do první rovnice.

$x+2y=7 \qquad /-2y$

$x=7-2y$

Dosadíme.

$(7-2y)+y+(7-2y)y=7$

$7-2y+y+7y-2y^2=7 \qquad /-7$

$6y-2y^2=0 \qquad /:2$

$y(3-y)=0$

$y_1=0 \qquad y_2=3$

Dvě řešení pro y $\Rightarrow$ pro každé musíme dopočítat odpovídající x.

$y_1=0$

$x_1=7-2y=7-2\cdot 0=7$

$y_2=3$

$x_2=7-2y=7-2\cdot 3=1$

$K=\{[7;0];[1;3]\}$

Př. 2: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{aligned} x^2+x+y^2&=7 \\ x+y&=1 \end{aligned}$.

Problém: První rovnice obsahuje druhé mocniny $\Rightarrow$ vyjádříme y z druhé rovnice a dosadíme do první.

$x+y=1 \quad /-x$

$y=1-x$

Dosadíme:

$x^2+x+(1-x)^2=7$

$x^2+x+(1-2x+x^2)=7$

$x^2+x+1-2x+x^2=7 \qquad /-7$

$2x^2-x-6=0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-6)}}{2\cdot 2}=\frac{1\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{1\pm 7}{4}$$

$x_1=\frac{1+7}{4}=2$

$x_2=\frac{1-7}{4}=-\frac{3}{2}$

$y_1 = 1 - x = 1 - 2 = -1$

$y_2 = 1 - x = 1 - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}$

$K = \left\{[2;-1];\left[-\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right]\right\}$

Př. 3: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{matrix} 4x + 3y + 2xy = 49 \\ x + y + xy = 19 \end{matrix}$.

Problém: Obě rovnice obsahují člen xy $\Rightarrow$ vyjádření neznámých by bylo poměrně obtížné.
Řešení: Můžeme využít sčítací metodu a tyto členy odečíst.

$4x + 3y + 2xy = 49$

$x + y + xy = 19 \quad / \cdot 2$

$4x + 3y + 2xy = 49$

$2x + 2y + 2xy = 38$

$x + y + xy = 19$

$[\![1]\!] - [\![2]\!] \quad 2x + y = 11$

Nyní můžeme použít stejný postup jako v předchozích příkladech.
Z druhé rovnice vyjádříme y a dosadíme do první rovnice.

$2x + y = 11 \quad / -2x$

$y = 2x - 11$

Dosadíme do první rovnice.

$x + (11 - 2x) + x(11 - 2x) = 19$

$x + 11 - 2x + 11x - 2x^2 = 19 \quad / -19$

$-2x^2 + 10x - 8 = 0 \quad / : (-2)$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$(x - 4)(x - 1) = 0$

$x_1 = 4$

$y_1 = 11 - 2x = 11 - 2 \cdot 4 = 3$

$x_2 = 1$

$y_2 = 11 - 2x = 11 - 2 \cdot 1 = 9$

$K = \{[4;3];[1;9]\}$

Př. 4: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{matrix} x^2 + y^2 + x - 2y = 20 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{matrix}$.

Problém: Obě rovnice obsahují členy x^2 a y^2 $\Rightarrow$ vyjádření neznámých by bylo poměrně obtížné.
Řešení: Můžeme využít sčítací metodu a tyto členy odečíst.

$x^2 + y^2 + x - 2y = 20$

$x^2 + y^2 = 13$

$$x^2+y^2=13$$
$$[\![1]\!]-[\![2]\!] \quad x-2y=7$$

Z druhé rovnice vyjádříme x a dosadíme do první.

$x-2y=7 \quad /+2y$

$x=7+2y$

Dosadíme.

$(7+2y)^2+y^2=13$

$49+28y+4y^2+y^2=13 \quad /-13$

$5y^2+28y+36=0$

$$y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-28\pm\sqrt{28^2-4\cdot5\cdot36}}{2\cdot5}=\frac{-28\pm\sqrt{64}}{10}=\frac{-28\pm8}{10}$$

$y_1=\frac{-28+8}{10}=-2$

$x_1=7+2y=7+2(-2)=3$

$y_2=\frac{-28-8}{10}=-\frac{36}{10}=-\frac{18}{5}$

$x_2=7+2\cdot\left(-\frac{18}{5}\right)=\frac{35}{5}-\frac{36}{5}=-\frac{1}{5}$

$$K=\left\{[3;-2];\left[-\frac{1}{5};-\frac{18}{5}\right]\right\}$$

Př. 5: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{aligned}(x+y)(x-y)(2x+y+1)&=0\\2x-y&=3\end{aligned}$.

Problém: Roznásobením první rovnice získáme rovnici se třetími mocninami, kterou nedokážeme řešit.
Řešení: První rovnice připomíná rovnici v součinovém tvaru, jde o součin tří čísel, stačí, když se jedno z nich rovná nule a první podmínka bude splněná $\Rightarrow$ první rovnici si můžeme rozdělit na tři rovnice, ke každé musíme připojit druhou rovnici $\Rightarrow$ získáme tři soustavy rovnic.

$x+y=0$

$2x-y=3$

$x+y=0$

$[\![1]\!]+[\![2]\!] \quad 3x=3$

$x=1$

$x+y=0 \quad /-x$

$y=-x=-1$

$K=\{[1;-1]\}$

$x-y=0$

$2x-y=3$

$x+y=0$

$[\![2]\!]-[\![1]\!] \quad x=3$

$x-y=0 \quad /+y$

$y=x=3$

$K=\{[3;3]\}$

$2x+y=-1$

$2x-y=3$

$2x+y=-1$

$[\![1]\!]+[\![2]\!] \quad 4x=2$

$x=\frac{1}{2}$

$2x+y=-1 \quad /-2x$

$y=-1-2x=-1-2\cdot\frac{1}{2}=-2$

$K=\left\{\left[\frac{1}{2};-2\right]\right\}$

$$K=\left\{[1;-1];[3;3];\left[\frac{1}{2};-2\right]\right\}$$

Př. 6: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{matrix} x^2+2x+y=5 \\ x+y+xy=5 \end{matrix}$.

Problém: jedna rovnice obsahuje x^2, druhá součin xy $\Rightarrow$ sčítáním rovnic se nám nepodaří získat rovnici o jedné neznámé.
Řešení: Z druhé rovnice dosadíme do první (a budeme doufat, že to dobře dopadne).

$x+y+xy=5 \quad / -x$

$y(1+x)=5-x \quad / :(x+1)$

$y=\frac{5-x}{x+1}$

Dosadíme.

$x^2+2x+\frac{5-x}{x+1}=5 \quad / (x+1)$

$x^2(x+1)+2x(x+1)+5-x=5(x+1)$

$x^3+x^2+2x^2+2x+5-x=5x+5 \quad / -5$

$x^3+3x^2+x=5x \quad / -5x$

$x^3+3x^2-4x=0$

$x(x^2+3x-4)=0$

$x(x+4)(x-1)=0$

Rovnice v součinovém tvaru $\Rightarrow$ každou závorku řešíme zvlášť a pro každou hodnotu x dopočteme ihned hodnotu y.

$x=0$

$y=\frac{5-x}{x+1}=\frac{5-0}{0+1}=5$

$K=\{[0;5]\}$

$x=-4$

$y=\frac{5-x}{x+1}=\frac{5-(-4)}{-4+1}=-3$

$K=\{[-4;-3]\}$

$x=1$

$y=\frac{5-x}{x+1}=\frac{5-1}{1+1}=2$

$K=\{[1;2]\}$

$K=\{[0;5];[-4;-3];[1;2]\}$

Shrnutí: